LÊ HỒNG ĐỨC

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN

Hình học 11

(Biên soạn theo SGK mới của Bộ GD & ĐT dùng cho học sinh ban A và luyện thi đại học)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ BÍCH NGỌC (Chủ biên)
LÊ HỒNG ĐỨC

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN

HÌNH HỌC

11

Biên soạn theo SGK mới của Bộ Giáo dục và Đào tạo
Dùng cho học sinh ban A và luyện thi đại học

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ tài liệu:

HỌC VÀ ÔN TẬP
TOÁN

do Nhóm Cự Môn dưới sự phụ trách của Thạc sĩ Toán học – Kĩ sư Tin học Lê Hồng Đức biên soạn.

Bộ tài liệu gồm 8 cuốn:

Cuốn 1 : Học và ôn tập Toán - Hình học 10
Cuốn 2 : Học và ôn tập Toán - Đại số 10
Cuốn 3 : Học và ôn tập Toán - Lượng giác 11
Cuốn 4 : Học và ôn tập Toán - Hình học 11
Cuốn 5 : Học và ôn tập Toán - Đại số và Giải tích 11
Cuốn 6 : Học và ôn tập Toán - Hình học 12
Cuốn 7 : Học và ôn tập Toán - Giải tích 12
Cuốn 8 : Học và ôn tập Toán - Đại số tổ hợp 12

Mục tiêu của bộ tài liệu này là cung cấp cho các Thày, Cô giáo một bộ bài giảng chuyên sâu có chất lượng và cho các em học sinh Trung học phổ thông yêu thích môn Toán một bộ tài liệu học tập bổ ích.

Bộ tài liệu được viết trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tận dụng được đầy đủ thế mạnh của các phương pháp đặc biệt để giải Toán.

Bộ tài liệu này chắc chắn phù hợp với nhiều đối tượng bạn đọc từ các Thày, Cô gáo đến các em Học sinh lớp 10, 11, 12 và các em chuẩn bị dự thi môn ToánTốt nghiệp PTTH hoặc vào các Trường Đại học.

Cuốn

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN
HÌNH HỌC 11

do Lê Bích Ngọc chủ biên được chia thành 5 chương:

Chương I: Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng
Chương II: Quan hệ song song
Chương III: Quan hệ vuông góc
Chương IV: Mặt cầu và mặt tròn xoay
Chương V: Diện tích và thể tích

bao gồm 21 chủ đề, miêu tả chi tiết phương pháp giải cho 48 dạng toán cơ bản và nâng cao của hình học 11.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Nhóm Cự Môn
Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ -Hà Nội

Hà nội, ngày 2 tháng 9 năm 2005
NHÓM CỰ MÔN

CHƯƠNG I

ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

CHỦ ĐỀ 1

MỞ ĐẦU VỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Môn *hình học không gian* là môn học nghiên cứu các tính chất của các hình nằm trong không gian.

Hình học không gian có các đối tượng cơ bản là "*điểm*", "*đường thẳng* " và "*mặt phẳng* ".

1. QUAN HỆ THUỘC

a. Với một điểm A và một đường thẳng d có thể xảy ra hai trường hợp:
   - Điểm A *thuộc* đường thẳng d, kí hiệu $a \in d$.
   - Điểm A *không thuộc* đường thẳng d, kí hiệu $a \notin d$.

b. Với một điểm A và một mặt phẳng α có thể xảy ra hai trường hợp:
   - Điểm A *thuộc* mặt phẳng α, kí hiệu $a \in \alpha$.
   - Điểm A *không thuộc* mặt phẳng α, kí hiệu $a \notin \alpha$.

2. CÁC TIÊN ĐỀ

Tiên đề 1: *Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.*

Tiên đề 2: *Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.*

Tiên đề 3: *Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.*

Tiên đề 4: *Có ít nhất bốn điểm không đồng phẳng.*

3. NHỮNG KẾT QUẢ MỞ ĐẦU

***Định lí 1**: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất và chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.*

Khi đó, đường thẳng chung được gọi là *giao tuyến* của hai mặt phẳng.

***Định lí 2**: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua một đường thẳng và một điểm nằm ngoài đường thẳng đó.*

***Định lí 3**: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua hai đường thẳng cắt nhau.*

4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Cho đường thẳng a và mặt phẳng α. Căn cứ vào số điểm chung của đường thẳng và mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Đường thẳng a và mặt phẳng α không có điểm chung, tức là:

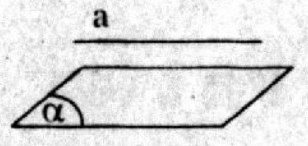
$$a \cap \alpha = \varnothing \Leftrightarrow a \,//\, \alpha.$$

b. Đường thẳng a và mặt phẳng α chỉ có một điểm chung, tức là:

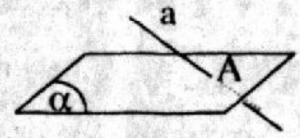
$$a \cap \alpha = \{A\} \Leftrightarrow a \text{ cắt } \alpha \text{ tại A.}$$

c. Đường thẳng a và mặt phẳng α có 2 điểm chung phân biệt, tức là:

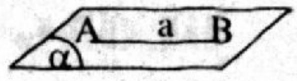
$$a \cap \alpha = \{A, B\} \Leftrightarrow a \subset \alpha.$$



$a \cap \alpha = \varnothing \Leftrightarrow a // \alpha$



$a \cap \alpha = \{A\} \Leftrightarrow$ a cắt α



$a \cap \alpha = \{A, B\} \Leftrightarrow a \subset \alpha$

5. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẲNG

Cho 2 mặt phẳng α và β. Căn cứ vào số đường thẳng chung của 2 mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Hai mặt phẳng α và β không có đường thẳng chung, tức là:

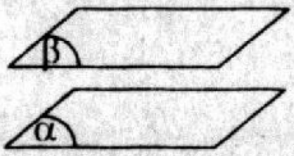
$$\alpha \cap \beta = \varnothing \Leftrightarrow \alpha // \beta.$$

b. Hai mặt phẳng α và β chỉ có một đường thẳng chung, tức là:

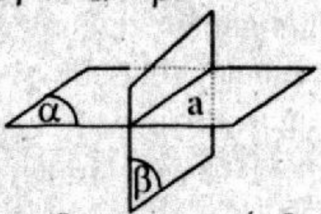
$$\alpha \cap \beta = a \Leftrightarrow \alpha \text{ cắt } \beta.$$

c. Hai mặt phẳng α và β có 2 đường thẳng chung phân biệt, tức là:

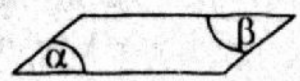
$$\alpha \cap \beta = \{a, b\} \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta.$$



$\alpha \cap \beta = \varnothing \Leftrightarrow \alpha // \beta$



$\alpha \cap \beta = a \Leftrightarrow$ α cắt β



$\alpha \cap \beta = \{a, b\} \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta$

6. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho 2 đường thẳng a và b. Căn cứ vào sự đồng phẳng và số điểm chung của 2 đường thẳng ta có bốn trường hợp sau:

a. *Hai đường thẳng song song*: cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung, tức là:

$$a // b \Leftrightarrow \begin{cases} a \subset \alpha \wedge b \subset \alpha \\ a \cap b = \phi \end{cases}.$$

b. *Hai đường thẳng cắt nhau*: chỉ có một điểm chung.

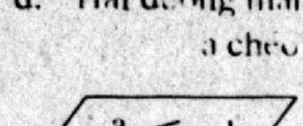
$$a \text{ cắt } b \Leftrightarrow a \cap b = \{I\}.$$

c. Hai đường thẳng trùng nhau: có hai điểm chung phân biệt.

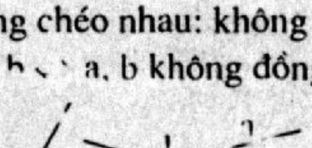
$$a \cap b = \{A, B\} \Leftrightarrow a \equiv b.$$

d. Hai đường thẳng chéo nhau: không cùng thuộc một mặt phẳng.

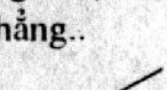
a chéo b ⇔ a, b không đồng phẳng..



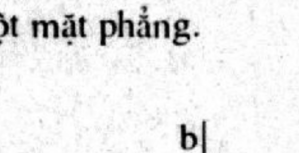
a//b



a cắt b



a≡b



a,b chéo nhau

7. CÁCH XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

7.1. Cách xác định đường thẳng

Có ba cách xác định một đường thẳng:

Cách 1: Biết hai điểm phân biệt A, B của đường thẳng. Kí hiệu (AB).

Cách 2: Biết một điểm của đường thẳng và phương của đường thẳng đó.

Cách 3: Biết hai mặt phẳng phân biệt cùng chứa đường thẳng cần tìm.

7.2. Cách xác định mặt phẳng

Có bốn cách xác định một mặt phẳng:

Cách 1: Biết 3 điểm A, B, C không thẳng hàng của mặt phẳng, kí hiệu (ABC).

Cách 2: Biết 1 điểm A và một đường thẳng d không chứa A của mặt phẳng, kí hiệu (A, d).

Cách 3: Biết 2 đường thẳng cắt nhau a, b của mặt phẳng, kí hiệu (a, b).

Cách 4: Biết 2 đường thẳng song song a, b của mặt phẳng, kí hiệu (a, b).

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Sử dụng các tiên đề xét vị trí tương đối của điểm, đường thẳng và mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Để biết khi nào một điểm thuộc một mặt phẳng, ta có các kết quả sau:
   - Giả sử α là mặt phẳng xác định bởi ba điểm A, B, C thì khi đó A, B, C đều thuộc α.
   - Nếu đường thẳng a chứa trong mặt phẳng α, thì khi đó điểm M thuộc a đều thuộc α.
2. Để chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng α ta đi chứng minh tồn tại hai điểm phân biệt A, B thuộc a và thuộc α.
   - Nếu mặt phẳng α cố định thì ta khẳng định được thêm rằng "*Đường thẳng a nằm trong một mặt phẳng cố định* α ".
   - Nếu hai điểm A, B cố định thì ta khẳng định được thêm rằng "*Mặt phẳng* α *chứa một đường thẳng cố định* a ".
3. Để chứng minh hai đường thẳng a, b chéo nhau, ta thường sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng, cụ thể:
   - Giả sử a, b không chéo nhau, tức là có một mặt phẳng α chứa cả a và b.
   - Suy ra một kết luận vô lý (trái với giả thiết hoặc trái với các tiên đề, các định lí).
   - Kết luận rằng hai đường thẳng a, b chéo nhau.

<u>Ví dụ 1:</u> Chứng minh rằng nếu ba đường thẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một thì chúng đồng quy hoặc cùng nằm trong một mặt phẳng.

Giải

Với ba đường thẳng phân biệt a, b, c. Giả sử:

$$a \cap b = \{A\},\ b \cap c = \{B\},\ c \cap a = \{C\}.$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Ba điểm A, B, C là ba điểm phân biệt.

Do a, b, c phân biệt nên A, B, C là ba điểm không thẳng hàng. Vậy chúng xác định một mặt phẳng (ABC). Ta có:

- Đường thẳng a có hai điểm A, C thuộc (ABC), nên $a \in (ABC)$.
- Tương tự $b \in (ABC)$ và $c \in (ABC)$.

Vậy, ba đường thẳng a, b, c cùng thuộc một mặt phẳng (ABC).

Trường hợp 2: Hai trong ba điểm A, B, C trùng nhau, giả sử A ≡ B.

Nếu A $\neq$ C thì a $\equiv$ c, mâu thuẫn.

Do đó, ta phải có:

$$A \equiv C \Leftrightarrow A \equiv B \equiv C \Leftrightarrow a, b, c \text{ đồng quy.}$$

Vậy, ba đường thẳng a, b, c đồng quy.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng α, cho góc $\widehat{xOy}$. A là điểm ngoài α. M, N là hai điểm di động lần lượt trên Ox, Oy.

1. Giả sử OM = ON. Chứng minh rằng trung tuyến AP của ΔAMN luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.
2. Gọi d là đường thẳng cố định qua A và cắt α tại một điểm không thuộc 0x, Oy. MN di động nhưng luôn cắt d.
   a. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.
   b. Gọi B là điểm cố định trên d, B ≠ A và không thuộc α. AM và BN cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng Q thuộc đồng thời hai mặt phẳng cố định. Suy ra Q thuộc một đường thẳng cố định.

Giải

1. Ta có:

OM = ON ⇒ P thuộc Oz là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ – cố định.

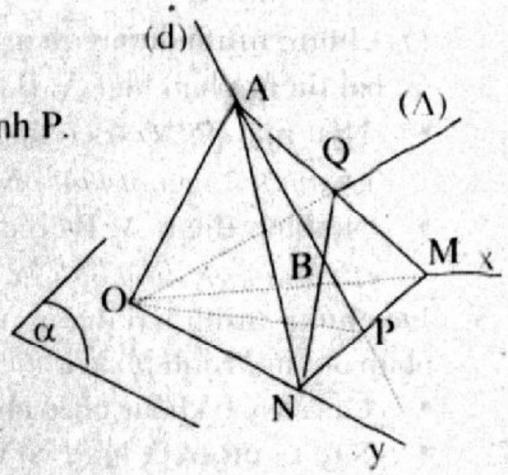
Vậy, trung tuyến AP nằm trong mặt phẳng cố định (A, Oz).

2. Giả sử $d \cap \alpha = \{P\}$ – cố định.

a. Ta có ngay:

$d \cap MN = \{P\}$ cố định.

Vậy, đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định P.



b. Ta có:

- $Q \in BN \subset (B, Oy)$ – cố định
  $\Rightarrow Q \in (B, Oy)$ – cố định.
- $Q \in AM \subset (A, Ox)$ – cố định
  $\Rightarrow Q \in (A, Ox)$ – cố định.

Vậy, điểm Q thuộc đường thẳng cố định Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng cố định (A, Ox) và (B, Oy).

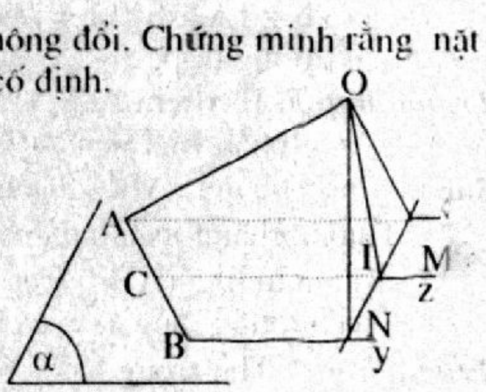
Ví dụ 3: Trong mặt phẳng α, cho hai nửa đường thẳng song song Ax, By. M và N là hai điểm lần lượt thuộc Ax và By; M ≠ A và N ≠ B. O là điểm cố định không thuộc α.

a. Chứng minh rằng OA và MN chéo nhau.

b. M, N di động, chứng tỏ rằng đường thẳng OI nối O với trung điểm I của MN nằm trong mặt phẳng cố định.

c. M, N di động nhưng AM + BN có giá trị không đổi. Chứng minh rằng mặt phẳng (OMN) luôn chứa một đường thẳng cố định.

Giải



a. Ta đi chứng minh bằng phản chứng. Thật vậy, giả sử OA và MN không chéo nhau tức chúng cùng nằm trong một mặt phẳng. Mặt phẳng này chứa ba điểm A, M, N không thẳng hàng, đó chính là mặt phẳng α, suy ra:

$O \in \alpha$, trái với giả thiết.

Vậy, OA và MN chéo nhau.

b. Gọi C là trung điểm AB, nhận xét rằng:

ABNM là hình thang

$\Rightarrow I \in Cz$ là đường trung bình của ABNM – cố định

Vậy, OI nằm trong mặt phẳng cố định (O, Cz).

c. Xét hình thang ABNM, ta có:

$$CI = \frac{1}{2}(AM + BN)$$ – không đổi $\Rightarrow$ I cố định.

Vậy, mặt phẳng (OMN) chứa đường thẳng OI cố định.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng α và một đường thẳng b cắt α tại điểm O. Chứng minh rằng nếu điểm O không thuộc a thì a và b chéo nhau.

Bài tập 2: Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b. Trên a lấy hai điểm phân biệt A, B, trên b lấy hai điểm phân biệt C, D.

a. Chứng minh rằng AC và BD chéo nhau.

b. M là một điểm trên cạnh AC, N là một điểm trên cạnh BD. MN có thể song song với AB hoặc CD được không ?

c. O là điểm trên MN. Chứng minh rằng AO cắt CN, và BO cắt DM.

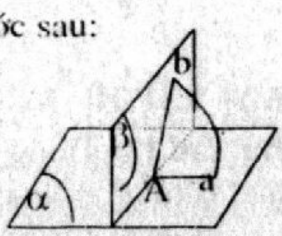
Bài toán 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng.

Bước 2: Đường thẳng qua 2 điểm chung đó là giao tuyến.



Chú ý: Để tìm điểm chung của hai mặt phẳng ta thường tìm hai đường thẳng đồng phẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng đó. Giao điểm, nếu có, của hai đường thẳng này chính là điểm chung của hai mặt phẳng.

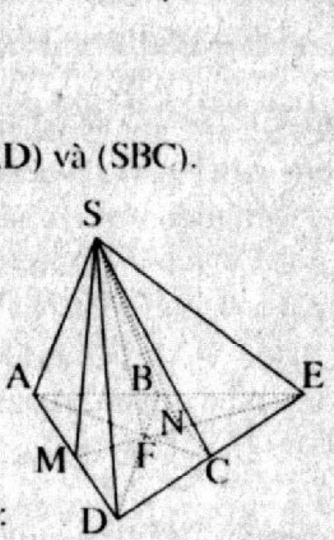
<u>Ví dụ 1:</u> Trong mặt phẳng α, cho tứ giác ABCD có AB cắt CD tại E, AC cắt BD tại F. S là một điểm không thuộc α.

a. Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD).

b. Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD).

c. Tìm giao tuyến của (SEF) với các mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Giải



a. Ta có ngay S là điểm chung của (SAB) và (SCD).

Mặt khác:

$E \in AB \subset (SAB) \Rightarrow E \in (SAB)$.

$E \in CD \subset (SCD) \Rightarrow E \in (SCD)$.

Vậy, ta được $SE = (SAB) \cap (SCD)$.

b. Tương tự câu a), ta được $SF = (SAC) \cap (SBD)$.

c. Giả sử EF cắt AD và BC theo thứ tự tại M, N. Khi đó:

- (SEF) và (SAD) có hai điểm chung là S và M nên có giao tuyến là SM.

- (SEF) và (SBC) có hai điểm chung là S và N nên có giao tuyến là SN.

Chú ý: Trong câu c) chúng ta đã sử dụng ý tưởng trong phần chú ý của bài toán 2 để thực hiện tìm điểm chung thứ hai, cụ thể:

- Trong mặt phẳng (SEF) ta chọn đường thẳng EF.
- Trong mặt phẳng (SBC) ta chọn đường thẳng BC.
- Ta có EF và BC cùng nằm trong mặt phẳng (ABCD) và $EF \cap BC = \{N\}$.
- Do đó N là điểm chung của hai mặt phẳng (SEF) và (SBC).

Đối với ví dụ trên, điều này rất trực quan và thấy ngay được. Tuy nhiên, một vài bài toán các em học sinh cần hiểu được bản chất của vấn đề mới có được lựa chọn thích hợp.

<u>Ví dụ 2:</u> Trong mặt phẳng α, cho hình bình hành ABCD tâm O, S là một điểm không thuộc α. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, SO. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng (SAB), (SAD), (SBC) và (SCD).

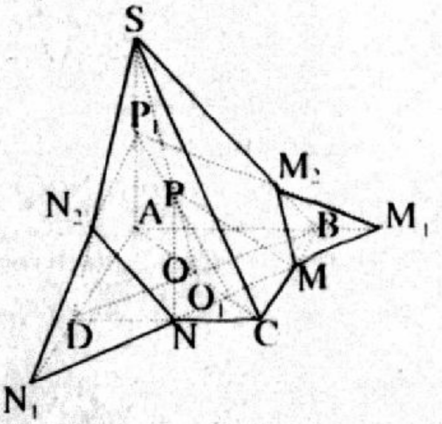
Giải

Đường thẳng MN cắt AB, AD và AC tại M_1, N_1 và O_1. Khi đó:

- Nối O_1P cắt SA tại P_1.
- Nối M_1P_1 cắt SB tại M_2.
- Nối N_1P_1 cắt SD tại N_2.

Vậy, ta được:

$(MNP) \cap (SAB) = P_1M_2$.
$(MNP) \cap (SAD) = P_1N_2$.
$(MNP) \cap (SBC) = MM_2$.
$(MNP) \cap (SCD) = NN_2$.



BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Trong mặt phẳng α, cho ΔABC, D là một điểm không thuộc α. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC. K là điểm trên cạnh BD sao cho KD < KB. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IJK) với các mặt phẳng (ACD) và (ABD).

Bài tập 2: Trong mặt phẳng α, cho ΔABC, D là một điểm không thuộc α. M là một điểm bên trong ΔABD, N là một điểm bên trong ΔACD.

a. Tìm giao tuyến của (AMN) và (BCD).
b. Tìm giao tuyến của (DMN) và (ABC).

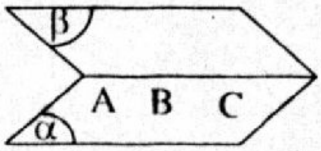
Bài tập 3: Trong mặt phẳng α, cho ΔABC, D là một điểm không thuộc α. O là điểm bên trong ΔBCD, M là điểm trên AO.

a. Tìm giao tuyến của (MCD) với các mặt phẳng (ABC) và (ABD).
b. I, J là hai điểm trên BC và BD. Tìm giao tuyến của (IJM) và (ACD).

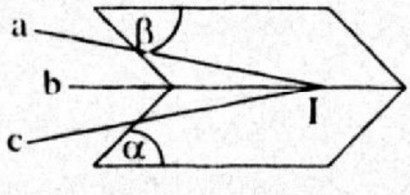
Bài tập 4: Trong mặt phẳng α, cho hình bình hành ABCD tâm O, S là một điểm không thuộc α. M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD, P là điểm trên SC và SP > PC. Tìm giao tuyến của (MNP) với các mặt phẳng (SAB), (SAD), (SAC) và (ABCD).

Bài toán 3:	Chứng minh ba điểm thẳng hàng.
	Ba đường thẳng đồng quy.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG



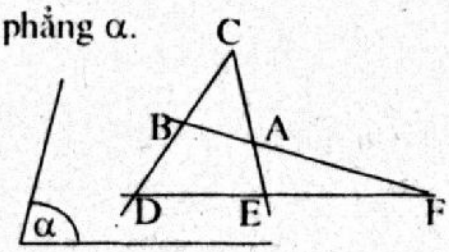
1. Để chứng minh 3 điểm thẳng hàng, ta chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt. Khi đó chúng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng đó.



2. Để chứng minh 3 đường thẳng đồng quy, ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng này là điểm chung của hai mặt phẳng mà giao tuyến là đường thẳng thứ ba.

Ví dụ 1: Cho mặt phẳng α và ba điểm A, B, C không thẳng hàng ở ngoài α. Giả sử các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt cắt α tại D, E, F. Chứng minh ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Giải



Trước tiên, ta thấy ngay ba điểm D, E, F thuộc mặt phẳng α.

Mặt khác, ta có::

$D \in BC \subset (ABC) \Rightarrow D \in (ABC)$.

$E \in CA \subset (ABC) \Rightarrow E \in (ABC)$.

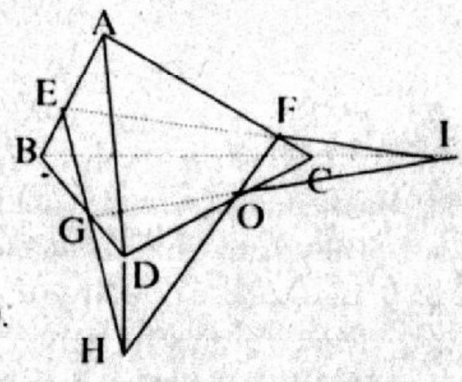
$F \in AB \subset (ABC) \Rightarrow F \in (ABC)$.

Vậy, ta được:

$(ABC) \cap \alpha = \{D, E, F\} \Rightarrow$ D, E, F thẳng hàng.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng α, cho ΔBCD, A là một điểm không thuộc α. Gọi E, F, G lần lượt là 3 điểm trên 3 cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại H. Chứng minh CD, IG, HF đồng quy.

Giải



Gọi O là giao điểm của HF và IG. Ta có:

$O \in HF \subset (ACD) \Rightarrow O \in (ACD)$.

$O \in IG \subset (BCD) \Rightarrow O \in (BCD)$.

Suy ra:

$O \in (ACD) \cap (BCD) = CD$.

Vậy, ba đường thẳng CD, IG, HF đồng quy tại O.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hai điểm A và B nằm trong mặt phẳng α và một điểm O nằm ngoài α. Lấy M, N theo thứ tự thuộc OA và OB, với $M \neq O$, $M \neq A$, $N \neq O$, $N \neq A$. Giả sử MN cắt α tại C. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài tập 2: Cho mặt phẳng α và 2 điểm A, B cố định ở ngoài α. M là điểm di động trong không gian sao cho MA, MB cắt α tại A_1, B_1. Chứng minh A_1B_1 luôn đi qua một điểm cố định.

Bài tập 3: Trong mặt phẳng α, cho ΔABC, D là một điểm không thuộc α. Qua C dựng mặt phẳng γ cắt AB, BD tại B_1, B_2, qua B dựng mặt phẳng β cắt AC, CD tại C_1, C_2. BB_1, CC_1 cắt nhau tại O_1; BB_2, CC_2 cắt nhau tại O_2. Giả sử O_1O_2 kéo dài cắt SA tại I.

a. Chứng minh AO_1, DO_2, BC đồng quy.

b. Chứng minh I, B_1, B_2 và I, C_1, C_2 thẳng hàng.